

Estadística Superior

CLAVE: LII

PROFESOR: MTRO. ALEJANDRO SALAZAR GUERRERO

1. REGRESIÓN LINEAL SIMPLE Y MÚLTIPLE

- 1.1. Regresión lineal simple
- 1.2. Estimación y predicción por intervalo en regresión lineal simple
- 1.3. Regresión lineal múltiple
- 1.4. Intervalos de confianza y predicción en regresión múltiple
- 1.5. Uso de un software estadístico

2. DISEÑO DE EXPERIMENTOS DE UN FACTOR

- 2.1. Diseño complementario al azar y ANOVA
- 2.2. Comparaciones o pruebas de rangos múltiples
- 2.3. Verificación de los supuestos del modelo
- 2.4. Elección del tamaño de la muestra
- 2.5. Uso de un software estadístico

3. DISEÑO DE BLOQUES

- 3.1. Diseños en bloques completos al azar
- 3.2. Diseño en cuadrado latino
- 3.3. Diseño en cuadrado grecolatino
- 3.4. Uso de un software estadístico

4. INTRODUCCIÓN A LOS DISEÑOS FACTORIALES

- 4.1. Diseños factoriales con dos factores
- 4.2. Diseños factoriales con tres factores
- 4.3. Modelos de efectos aleatorios
- 4.4. Uso de un software estadístico

3. DISEÑO DE BLOQUES

3.1. Diseños en bloques completos al azar

Un bloque es (en Estadística) un grupo de observaciones que tienen condición de unicidad estadística, esto es, que pueden y deben ser analizadas e interpretadas sólo de modo conjunto.

Se dice que un bloque es un bloque completo cuando todos sus elementos componentes tienen valores válidos (es decir, no omitidos o “missing”). En caso contrario, se dice que el bloque es un bloque incompleto. Generalmente, un bloque está estadísticamente incompleto cuando alguno de los niveles factoriales no posee valores. El interés por el análisis estadístico de bloques incompletos estriba en estudiar el efecto que la omisión (deliberada o no) de cierto nivel factorial tiene sobre la característica estudiada.

Un bloque puede estar fijado o establecido por el investigador de modo arbitrario. En este caso, se dice que ese bloque es un bloque no aleatorio. Pero puede que este bloque esté fijado, configurado o seleccionado según la ley estadística del azar, en cuyo caso se dice que el bloque es un bloque aleatorio.

Diseño de Bloques como Alternativa al ANOVA

El diseño de bloques aleatorizados (completo o no) representa una alternativa al ANOVA y al ANCOVA (Análisis de la Covarianza). Se somete a los sujetos a medidas a un efecto adicional (los bloques) y se les agrupa de acuerdo con sus puntuaciones. Los grupos de sujetos se convierten en los niveles de las variables independientes (VI) de interés en el diseño factorial. La interpretación del efecto principal de las VI de interés es directa. En el caso de ANCOVA, se elimina la variación debida a la(s) covariable(s) de la estimación de la varianza del error y se la evalúa como un efecto principal separado. Además, si en ANCOVA se hubiesen violado las asunciones de homogeneidad de la regresión, se muestra como una interacción entre los bloques y la(s) VI de interés.

El diseño de bloques aleatorizados (llamado en inglés “blocking”) tiene varias ventajas sobre ANOVA y ANCOVA:

- En primer lugar, no tiene ninguna de las asunciones de ANCOVA o de un ANOVA dentro de sujetos.
- En segundo lugar, la relación entre la(s) covariable(s) potencial(es) y la VD no necesita ser lineal (el blocking es menos poderoso cuando la relación entre covariable y la VD no es lineal). Las relaciones curvilíneas pueden ser estudiadas en ANOVA cuando se analizan tres (o más) niveles de una VI.

El blocking es, por tanto, preferible a ANOVA y ANCOVA en muchas situaciones y, particularmente, cuando se realiza una investigación experimental, en vez de una investigación correlacional.

El blocking se puede ampliar a una situación de múltiples covariables. Es decir, se pueden desarrollar varias nuevas VI, una para cada VI, a través del blocking y, con alguna dificultad, cruzarlas en un diseño factorial. Sin embargo, a medida que aumenta el número de VI, el diseño se vuelve cada vez mayor y más complejo, y esto hace más difícil la interpretación de los resultados.

Para algunas aplicaciones, sin embargo, ANCOVA es preferible al blocking:

- Cuando la relación entre la VD y las covariables es lineal, ANCOVA es más poderoso que el blocking.
- En el caso de que se cumplan las asunciones de ANCOVA, la conversión de una covariable continua en una VI discreta puede provocar una pérdida de información.
- Finalmente, ciertas limitaciones prácticas podrían prevenir con la suficiente anticipación de la medición eficaz de covariables potenciales sobre el tratamiento estudiado para cumplir la condición de asignación aleatoria de números iguales de sujetos las celdas del diseño. Cuando se intenta realizar un diseño por bloques (blocking) tras el tratamiento, es probable que los tamaños muestrales dentro de las celdas sean muy discrepantes, conduciendo a los problemas típicos de tamaños desiguales.

Conocido como diseño de doble vía, se aplica cuando el material es heterogéneo. Las unidades experimentales homogéneas se agrupan formando grupos homogéneos llamados bloques.

Tratamientos A, B, C, D, E

Bloque I : B A E C D

Bloque II : C B D E A

Bloque III: B E A D C

Bloque IV: D C A E B

Las fuentes de variación para el análisis estadístico son:

Fuentes Grados de libertad

Tratamiento (t-1) = 4

Bloques (r-1) = 3

Error (t-1)(r-1)=12

Características:

1. Las unidades experimentales son heterogéneas.
2. Las unidades homogéneas están agrupadas formando los bloques.
3. En cada bloque se tiene un número de unidades igual al número de tratamientos (bloques completos)
4. Los tratamientos están distribuidos al azar en cada bloque.
5. El número de repeticiones es igual al número de bloques.

MODELO

Cada observación del experimento es expresada mediante una ecuación lineal en los parámetros, el conjunto conforma el modelo para el diseño de bloques completos al azar:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

$i=1,2,\dots,t \quad j=1,2,\dots,r$

μ = Parámetro, efecto medio

τ_i = Parámetro, efecto del tratamiento

β_j = Parámetro, efecto del bloque j
 ϵ_{ij} = valor aleatorio, error experimental de la u.e. i,j
 Y_{ij} = Observación en la unidad experimental

ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS por Mínimos cuadrados del error

$$\sum \hat{\tau}_i = 0; \sum \hat{\beta}_j = 0$$

$$\hat{\mu} = \bar{Y}_{..}$$

$$\hat{\tau}_i = \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}$$

$$\hat{\beta}_j = \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}$$

El error en cada unidad experimental puede ser encontrado por diferencia:

$$\epsilon_{ij} = Y_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{..}$$

SUMAS DE CUADRADOS

$$SC \text{ total} = \sum \sum (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum \sum Y_{ij}^2 - \frac{Y_{..}^2}{rt}$$

$$SC \text{ trat.} = \sum \sum (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum \frac{Y_{i.}^2}{r} - \frac{Y_{..}^2}{rt}$$

$$SC \text{ bloque} = \sum \sum (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum \frac{Y_{.j}^2}{t} - \frac{Y_{..}^2}{rt}$$

$$SC \text{ error} = \sum \sum \epsilon_{ij}^2 = \sum \sum Y_{ij}^2 - \sum_i \frac{Y_{i.}^2}{r} - \sum_j \frac{Y_{.j}^2}{t} + \frac{Y_{..}^2}{rt}$$

$$\frac{\sum Y^2}{rt}$$

Es el término de corrección (TC) de las sumas de cuadrados, en las expresiones de sumas de cuadrados se acostumbra colocar sólo TC, por ejemplo:

$$SC\ TOTAL = \sum \sum Y_{ij}^2 - TC$$

3.2. Diseño en cuadrado latino.

Para el diseño de Cuadro Latino, se supone que es necesario comparar tres tratamientos A, B y C en presencia de otras dos fuentes de variabilidad. Por ejemplo, los tres tratamientos pueden ser tres métodos de soldadura para conductores eléctricos y las dos fuentes de variabilidad pueden ser:

- 1) Diferentes operarios
- 2) La utilización de diferentes fundentes para soldar.

Si se consideran tres operarios y tres fundentes, el experimento puede disponerse así:

	Fundente 1	Fundente 2	Fundente 3
Operador 1	A	B	C
Operador 2	C	A	B
Operador 3	B	C	A

Aquí cada método de soldadura se aplica sólo una vez por cada operario junto con cada fundente.

Un arreglo experimental como el descrito se denomina Cuadro Latino. Un Cuadro Latino n x n es un arreglo cuadrado de n letras distintas, las cuales aparecen sólo una vez en cada renglón y en cada columna. Nótese que en un experimento en Cuadro Latino de n tratamientos es necesario incluir n² observaciones, n por cada tratamiento.

Un experimento en Cuadro Latino sin repetición da solo (n-1).(n-2) grados de libertad para estimar el error experimental. De modo que tales experimentos son efectuados en contadas ocasiones sin repetición cuando n es pequeña.

Si existe un total de r repeticiones, el análisis de los datos presupone el siguiente modelo, donde $y_{ij(k)}$ es la observación en el i-ésimo renglón, en la j-ésima columna, de la l-ésima repetición y el subíndice k indica el k-ésimo tratamiento:

$$y_{ij(k)l} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \rho_l + \varepsilon_{ij(k)l} \quad \text{para } i, j, k = 1, 2, \dots, n \text{ y } l = 1, 2, \dots, r$$

Con las restricciones:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0 \quad \sum_{j=1}^n \beta_j = 0 \quad \sum_{k=1}^n \gamma_k = 0 \quad \sum_{l=1}^r \rho_l = 0$$

Donde:

- μ es la gran media
- α_i es el efecto de la i-ésima fila o renglón
- β_j es el efecto de la j-ésima columna
- γ_k es el efecto del k-ésimo tratamiento
- ρ_l es el efecto de la l-ésima repetición
- $\varepsilon_{ij(k)l}$ variable aleatoria independiente normal con $\mu = 0$ y varianza común σ^2 .

Nótese que por los “efectos de los renglones” y los “efectos de las columnas” se entienden los efectos de las dos variables extrañas y que se incluyen los “efectos de la repetición” como una tercera variable extraña. k está entre paréntesis ya que para un diseño de Cuadro Latino dado, k es automáticamente determinada cuando i y j se conocen.

La hipótesis principal a probar es la Hipótesis Nula $\gamma_k = 0$, para toda k, es decir la Hipótesis Nula de que no existe diferencia en la eficacia de n tratamientos.

También se puede probar si $\alpha_i = 0$, para todo i y $\beta_j = 0$, para todo j con el fin de comprobar si las dos variables extrañas tienen algún efecto sobre el fenómeno que se está considerando.

Mas aún, se puede probar es la Hipótesis Nula $\rho_l = 0$, para toda l, contra la alternativa que no todas las ρ_l son iguales a cero, y esta prueba del efecto de las repeticiones puede ser importante si las partes del experimento, que representan los Cuadros Latinos individuales, fueron realizados en distintos días, a diferentes temperaturas, etc..

Las fórmulas a aplicar son:

$$C = \frac{1}{r \cdot n} \cdot T \dots^2$$

$$SS(Tr) = \frac{1}{r \cdot n} \cdot \sum_{k=1}^n T_{(k)}^2 - C$$

$$SSR = \frac{1}{r \cdot n} \sum_{i=1}^n T_{i..}^2 - C \quad (\text{para renglones})$$

$$SSC = \frac{1}{r \cdot n} \sum_{j=1}^n T_{.j.}^2 - C \quad (\text{para columnas})$$

$$SS(\text{Rep}) = \frac{1}{n^2} \sum_{l=1}^r T_{..l}^2 - C \quad (\text{para repeticiones})$$

$$SST = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^r (y_{ij(k)l})^2 - C$$

$$SSE = SST - SS(\text{Tr}) - SSR - SSC - SS(\text{Rep})$$

Donde:

$T_{i..}$ total de las $r \cdot n$ observaciones en todos los i -ésimos renglones

$T_{.j.}$ total de las $r \cdot n$ observaciones en todas las j -ésimas columnas

$T_{..l}$ total de las n^2 observaciones en todas las l -ésimas repeticiones

$T_{(k)}$ total de las $r \cdot n$ observaciones relativas a los j -ésimos tratamientos

$T_{...}$ es el gran total de las $r \cdot n^2$ observaciones

Lo que lleva al siguiente cuadro de análisis:

Fuente de Variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados Medios	F
Tratamientos	$n - 1$	SS(Tr)	$MS(\text{Tr}) = SS(\text{Tr}) / (n - 1)$	$MS(\text{Tr}) / MSE$
Renglón	$n - 1$	SSR	$MSR = SSR / (n - 1)$	MSR / MSE
Columna	$n - 1$	SSC	$MSC = SSC / (n - 1)$	MSC / MSE
Repetición	$r - 1$	SS(Rep)	$MS(\text{Rep}) = SS(\text{Rep}) / (r - 1)$	$MS(\text{Rep}) / MSE$
Error	$(n - 1)(r \cdot n + r - 3)$	SSE	$MSE = SSE / [(n - 1) \cdot (r \cdot n + r - 3)]$	

Total	$r.n^2 - 1$	SST		
-------	-------------	-----	--	--

Ejemplo: Suponer que se efectúan repeticiones del experimento de soldadura empleando el siguiente arreglo:

Repetición I

Fundentes

	1	2	3
Operador 1	A	B	C
Operador 2	C	A	B
Operador 3	B	C	A

Repetición II

Fundentes

	1	2	3
Operador 1	C	B	A
Operador 2	A	C	B
Operador 3	B	A	C

Los resultados, que señalan el número de kilogramos fuerza de tensión requerida para separar los puntos soldados, fueron como se indica a continuación:

Repetición I

Fundentes

	1	2	3
Operador 1	14.0	16.5	11.0
Operador 2	9.5	17.0	15.0
Operador 3	11.0	12.0	13.5

Repetición II

Fundentes

	1	2	3
Operador 1	10.0	16.5	13.0
Operador 2	12.0	12.0	14.0
Operador 3	13.5	18.0	11.5

Analizar el experimento como un Cuadro Latino y probar con un nivel de significación de 0.01 si existen diferencias en los métodos, en los operadores, los fundentes o las repeticiones.

1 - $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 ; \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0 ; \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0 ; \rho_1 = \rho_2 = 0$

Hipótesis Alternativa: no todas las $\alpha, \beta, \gamma, \rho$ iguales a 0.

2 - Nivel de significancia: $\alpha = 0.01$.

3 - Para tratamientos, renglones y columnas se rechaza H_0 si $F > 7.56$ (este valor corresponde a $F_{0.01}$ con $v_1 = 2$ y $v_2 = 10$)

Para repeticiones se rechaza H_0 si $F > 10.0$ (este valor corresponde a $F_{0.01}$ con $v_1 = 1$ y $v_2 = 10$)

4 - Cálculos:

$n = 3 \quad r = 2 \quad T_{1..} = 81 \quad T_{2..} = 79.5 \quad T_{3..} = 75.5 \quad T_{.1} = 70.0$

$T_{.2} = 92.0 \quad T_{.3} = 78.0 \quad T_{..1} = 119.5 \quad T_{..2} = 120.5 \quad T_{(A)} = 87.5$

$T_{(B)} = 86.5 \quad T_{(C)} = 66.0 \quad T_{...} = 240.0 \quad \sum \sum \sum y_{ij(k)}^2 = 3304.5$

$C = 240^2 / 18 = 3200.0$

$$SST = 14^2 + 16.5^2 + \dots + 11.5^2 - 3200.0 = 104.5$$

$$SS(Tr) = (87.5^2 + 86.5^2 + 66.0^2) / 6 - 3200.0 = 49.1$$

$$SSR = (81^2 + 79.5^2 + 79.5^2) / 6 - 3200.0 = 0.2$$

$$SSC = (70^2 + 92^2 + 78^2) / 6 - 3200.0 = 41.2$$

$$SSE = 104.5 - 49.1 - 0.2 - 41.2 = 13.8$$

La Tabla queda:

Fuentes de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Media Cuadrada	F
Tratamientos (Métodos)	2	49.1	24.6	17.6
Renglones (Operadores)	2	0.2	0.1	0.1
Columnas (Fundentes)	2	41.3	20.6	14.7
Repeticiones	1	0.1	0.1	0.1
Error	10	13.8	1.4	
Total	17	104.5		

5 – En lo que respecta a tratamientos (métodos) y a columnas (fundentes) dado que $F = 17.6$ y 14.7 sobrepasan a 7.56 se rechazan las Hipótesis Nulas correspondientes.

Para renglones (operarios) dado que $F = 0.1$ no excede a 7.56 , no se rechaza H_0 .

En otras palabras, se concluye que las diferencias en los métodos y en los fundentes, pero no en los operadores y las repeticiones, afectan a la resistencia mecánica de la soldadura.

Más aún, la prueba del Rango Múltiple de Duncan da el siguiente patrón de decisión, con $\alpha = 0.01$:

	Método C	Método B	Método A
Media	11.0	14.4	14.6

En consecuencia, se concluye que el Método C produce uniones con soldaduras más débiles que los Métodos A y C.

En un diseño de experimentos completo de tres factores, todos ellos con K niveles, necesita K^3 observaciones, número elevado si K es grande. Un diseño más eficaz que solo utiliza K^2 observaciones para el mismo problema es el *cuadrado latino*. Este modelo se basa en aprovechar la simetría del experimento factorial seleccionando un conjunto de condiciones experimentales con la condición de que cada nivel de un factor aparezca una vez con cada uno de los niveles de los otros factores. Por tanto, el diseño de cuadrado latino se puede utilizar si se verifican las siguientes condiciones:

1. Es un diseño de experimentos con tres factores.
2. Los tres factores tienen el mismo número de niveles: K .
3. No hay interacciones entre los tres factores.

El diseño en cuadrado latino está especialmente indicado para estudiar un factor-tratamiento con K niveles y con dos factores-bloque de K bloques cada uno. Este diseño se basa en el concepto de cuadrado latino que es el siguiente

“Un *cuadrado latino* $K \times K$ es una disposición de K letras en una matriz $K \times K$ de forma que todas las letras aparecen una vez en cada fila y una vez en cada columna.

Por ejemplo, un cuadrado latino 3×3 es el siguiente

A	B	C
B	C	A
C	A	B

Tabla 5 Cuadrado latino 3×3 .

Un cuadrado latino es un cuadrado latino estándar cuando las letras de la primera fila y de la primera columna están dispuestas en orden alfabético.

Un cuadrado latino es un cuadrado latino cíclico si las letras de cada fila se generan cíclicamente de la anterior según el orden alfabético.

El cuadrado latino 3×3 de la Tabla 5 es estándar y cíclico.

Existe un único cuadrado latino 3×3 estándar, sin embargo hay cuatro cuadrados latinos 4×4 estándar que se presentan en la Tabla 6.

Cuadro 1	Cuadro 2	Cuadro 3	Cuadro 4
A B C D	A B C D	A B C D	A B C D
B C D A	B A D C	B A D C	B D A C

C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	B	A	C	A	D	B
D	A	B	C	D	C	B	A	D	C	A	B	D	C	B	A

Tabla 6: Cuatro posibles cuadrados latinos 4×4 estándar.

“Un diseño en cuadrado latino es un diseño de un factor tratamiento con K niveles y K^2 unidades experimentales agrupadas en K bloques fila y K bloques columna, de forma que unidades experimentales de un mismo bloque fila son semejantes, unidades experimentales de un mismo bloque columna son semejantes y unidades experimentales de distintos bloques fila y distintos bloques columna son sustancialmente diferentes”.

Para cualquier número de tratamientos K existe siempre al menos un diseño en cuadrado latino estándar cíclico.

Obsérvese que si en un diseño en cuadrado latino se ignora el bloque columna se tiene un diseño en bloques completamente aleatorizado (el bloque fila es el factor bloque) y, análogamente, si se ignora el bloque fila se tiene un diseño en bloques completamente aleatorizado (el bloque columna es el factor bloque). Además se trata de un diseño equirreplicado: cada tratamiento aparece un mismo número K de veces en el diseño.

Modelo matemático.

Se tiene un diseño en cuadrado latino de dos factores bloque y un factor tratamiento, el primer factor bloque se denota por $B\alpha$ y se coloca en filas, el segundo factor bloque se denota por $B\beta$ y se coloca en columnas, el factor tratamiento se denota por $T\gamma$ y sus niveles se colocan según el cuadrado latino. Por tanto, el cuadrado latino *condiciona* el nivel de $T\gamma$ que se utiliza en la casilla ij (bloque i de $B\alpha$ y bloque j de $B\beta$) y este nivel no se elige.

La formulación matemática del modelo es la siguiente:

Para cada $i = 1, \dots, K, j = 1, \dots, K$, (el índice k lo impone el diseño en cuadrado latino) se tiene

$$\underbrace{Y_{ij(k)}}_{\text{aleatorio}} = \overbrace{\mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k}^{\text{determinista}} + \underbrace{\varepsilon_{ij(k)}}_{\text{aleatorio}}$$

con $\varepsilon_{ij(k)}$ v.a. independientes con distribución $N(0, \sigma^2)$,

donde,

* Y_{ij} es el resultado del bloque i -ésimo, $i = 1, \dots, K$ del factor bloque $B\alpha$ y del bloque j -ésimo, $j = 1, \dots, J$ del factor-bloque $B\beta$, y del nivel k -ésimo del factor $T\gamma$. Se denota la k entre paréntesis, para indicar que este índice no se elige sino que viene condicionado por el par ij .

* μ es el efecto global que mide el nivel medio de todos los resultados,

* α_i es el efecto (positivo o negativo) sobre la media global debido al bloque i de $B\alpha$. Se verifica que $\sum_{i=1}^I \alpha_i = 0$,

* β_j es el efecto (positivo o negativo) sobre la media global debido al bloque j de $B\beta$. Se verifica que $\sum_{j=1}^J \beta_j = 0$,

* γ_k es el efecto (positivo o negativo) sobre la media global debido al nivel k del factor $F\gamma$. Se verifica que $\sum_{k=1}^K \gamma_k = 0$,

* ϵ_{ij} es el error experimental, son variables aleatorias i.i.d. con distribución N .

3.3. Diseño en cuadrado grecolatino

La eliminación de tres fuentes extrañas de variabilidad puede lograrse mediante el diseño de Cuadro Grecolatino. Es un diseño consistente en un arreglo cuadrado de n letras latinas y n letras griegas; más exactamente, cada letra latina aparece sólo una vez al lado de cada letra griega:

A α	B β	C γ	D δ
B δ	A γ	D β	C α
C β	D α	A δ	B γ
D γ	C δ	B α	A β

También se los llama “Cuadros Grecolatinos Ortogonales”.

La existencia de cuadros grecolatinos para un orden n dado se mantuvo en principio en el contexto de las curiosidades matemáticas. A mediados del siglo XX Fisher demostró su utilidad para el control, de experimentos estadísticos, más concretamente en experiencias agronómicas. La configuración del cuadrado grecolatino sería un modelo para experimentar cuatro tipos de cereal (a, b, c, d), con cuatro tipos de abono ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$), en una parcela rectangular que en un sentido norte-sur presenta una variación continua de humedad y en sentido este-oeste otra variación del terreno, como por ejemplo, la concentración de arcilla. Dividiendo en 16 subparcelas, pueden experimentarse diferentes combinaciones de cereal, abono, grados de humedad y concentración de arcilla.

00	11	22	33
12	03	30	21
23	32	01	10
31	20	13	02

0	5	10	15
6	3	12	9
11	14	1	4
13	8	7	2

1	6	11	16
7	4	13	10
12	15	2	5
14	9	8	3

El interés de este tipo de estructuras se describe a continuación. Se llama cuadrado mágico a una disposición de n^2 números naturales consecutivos (ordinariamente desde el 1 hasta el n^2) en las n^2

posiciones de un encasillado de n filas y n columnas de modo que los números de cada fila y cada columna sumen lo mismo. Vemos primeramente que la existencia de un cuadro grecolatino de orden n permite construir un cuadrado mágico del mismo orden.

En efecto, si interpretamos los símbolos del primer conjunto como cifras en base n (desde 0 hasta n-1) y lo mismo para las del segundo, el cuadrado grecolatino representa n² números diferentes de dos cifras expresados en base n. podemos entonces cambiar ambos conjuntos de símbolos por el conjunto {0, 1,2,..., n-1}.

El carácter grecolatino asegura la no repetición de números. Comienza en 0 (escrito 00) y termina en n² - 1 (escrito 33). Por lo tanto hay n² números consecutivos. En el cuadrado central se han colocado los mismos números en base 10 (desde el 0 hasta el 15) y en el de la derecha se ha sumado 1 a cada celda, con lo que se sitúa en el rango 1,...,n², como suele ser habitual. Nuevamente el carácter grecolatino del cuadrado de la izquierda asegura el carácter mágico de la derecha. En efecto, sumando “unidades” y “decenas” por separado en el cuadrado de la izquierda, los resultados serán iguales ya que hay una cifra y sólo una cifra de cada clase y están todas. Estas sumas valdrán 0 + 1 + 2 + 3 = 6 en el caso n=4. En general la suma de las unidades o decenas de cualquier fila o columna en el correspondiente cuadro grecolatino vale ½ (n² - n), que una vez traducido a base n tiene el valor:

$$S = (n^2 - n) (n - 1) / 2 = (n^3 - n) / 2$$

Para la suma de los números de cada fila o columna en el cuadrado central. Si añadimos una unidad a cada casilla para que los números queden en el rango 1,..., n², como muestra el cuadrado de la derecha, bastará sumar n a la fórmula anterior para obtener finalmente la suma de los términos de cada y cada columna en un cuadrado mágico de orden n:

$$Sn = (n^3 + n) / 2$$

En el caso práctico, podemos suponer el caso de las soldaduras, la temperatura es otra fuente de variabilidad. Si tres temperaturas de soldado, denotadas α , β y γ se utilizan junto con los tres métodos, los tres operadores (renglones) y tres fundentes (columnas), la repetición de un experimento apropiado de Cuadro Grecolatino puede establecerse así:

	Fundente 1	Fundente 2	Fundente 3
Operador 1	A α	B β	C γ
Operador 2	C γ	A β	B α
Operador 3	B β	C α	A γ

Así pues, el Método A sería utilizado por el Operador 1, usando fundente 1, a la temperatura α, por el Operador 2, usando fundente 2, a la temperatura β y por el Operador 3, usando fundente 3, a la temperatura γ.

En un Cuadro Grecolatino, cada variable (representada por renglones, columnas, letras latinas o letras griegas) está “distribuida equitativamente” respecto a las otras variables.

Si se aumenta el número de factores-bloque, la extensión del cuadrado latino es el greco-latino, que permite con K^2 observaciones estudiar cuatro factores de K niveles sin interacciones (un factor-tratamiento y tres factores bloque), si se utilizase el diseño completo es necesario utilizar K^4 observaciones. En el diseño en cuadrado greco-latino se superponen dos cuadrados latinos.

El inconveniente de este modelo es que su utilización es muy restrictiva. Además pueden no existir cuadrados latinos de determinadas condiciones.

3.4. Uso de un software estadístico.

ANÁLISIS EN SAS

Se usan los procedimientos GLM y MIXED. El GLM tiene la ventaja de presentar los resultados en un formato más familiar. La tabla resumen del Análisis de varianza incluye todos sus componentes (fuentes de variación, grados de libertad, sumas de cuadrados, cuadrados medios, valores F y valores p), indicando cuál es el término del error usado en cada caso.

Para la evaluación de los efectos principales se pueden usar diversas pruebas, entre ellas la de Duncan –no disponible en el PROC MIXED.

El PROC GLM tiene, sin embargo, la gran desventaja de que los errores estándar estimados para la evaluación de los efectos simples del factor a (el factor asignado a las parcelas principales) son incorrectos, por lo que tales pruebas carecen de validez.

```
DATA Ramio;
INPUT a$ b$ @;
  DO Bloques=1 to 3;
    INPUT Peso@;
    OUTPUT;
  END;
DATALINES;
a0 b1 78.9 72.5 78.6
a0 b2 68.1 66.1 69.3
a0 b3 56.9 57.1 53.9
a1 b1 84.3 99.3 72.9
a1 b2 86.8 108.9 86.6
a1 b3 73.1 73.4 61.7
a2 b1 95.6 95.2 96.9
a2 b2 97.8 108.1 99.2
a2 b3 90.3 121.4 97.6
;
PROC GLM;
  CLASS Bloques A B;
  MODEL Peso=Bloques A Bloques(A) B A*B/NOUNI;
  RANDOM Bloques(A)/TEST;
  MEANS A/DUNCAN E=Bloques(A);
  MEANS B/DUNCAN;
  LSMEANS A*B/PDIFF;
RUN;
```

Nótese que el Error a se estima con base en la expresión: “Bloques(A)”. En caso de que el factor correspondiente a las Parcelas Principales se haya asignado completamente al azar, este error se estimará con base en la expresión $R(A)$, siendo R las repeticiones. Bastará, pues, con cambiar Bloques(A) por $R(A)$ en todas las expresiones en las que aparezca y eliminar Bloques en el estamento MODEL, realizando las adecuaciones del caso en el paso DATA.

Para la evaluación de los efectos principales pueden usarse en el estamento MEANS las opciones LSD, DUNCAN, TUKEY, SCHEFFE y DUNNETT, entre otras.

No está de más insistir en el hecho de que las comparaciones generadas por el estamento LSMEANS sólo son adecuadas para los efectos simples del factor b . El error estándar estimado para los efectos simples del factor a es inadecuado, por lo que la evaluación de éstos no es correcta.

Para la evaluación de los efectos simples, el procedimiento usa por defecto la prueba t .

La opción PDIFF genera los valores p de todas las comparaciones por pares de medias. Se contrasta el siguiente juego de hipótesis:

$$H_0: \mu_{ij} = \mu_{(ij)}$$

$$H_a: \mu_{ij} \neq \mu_{(ij)}$$

La salidas contienen los valores p de todas las posibles comparaciones entre pares de medias. Se deberán analizar aquellas que corresponden a los efectos simples de interés. Si el valor p es menor o igual que el nivel de significancia preestablecido (usualmente 0.05), se rechaza H_0 , y se declara, con probabilidad de error igual a valor p , que hay diferencia entre las medias de los dos tratamientos comparados.

LSMEAN			
a	b	Peso LSMEAN	Number
a0	b1	76.666667	1
a0	b2	67.833333	2
a0	b3	55.966667	3
a1	b1	85.500000	4
a1	b2	94.100000	5
a1	b3	69.400000	6
a2	b1	95.900000	7
a2	b2	101.700000	8
a2	b3	103.100000	9

Least Squares Means for effect a*b
 Pr > |t| for H0: LSMean(i)=LSMean(j)

Dependent Variable: Peso

i/j	1	2	3	4	5
1		0.1070	0.0015	0.1070	0.0049
2	0.1070		0.0373	0.0045	0.0002
3	0.0015	0.0373		<.0001	<.0001
4	0.1070	0.0045	<.0001		0.1156
5	0.0049	0.0002	<.0001	0.1156	
6	0.1773	0.7626	0.0212	0.0080	0.0004

La comparación de los efectos simples de b en a_0 consiste en comparar las medias 1, 2 y 3 acorde con el número asignado a cada una de las combinaciones de tratamientos (LSMEAN Number de la página anterior). El valor p de comparar b_1 contra b_3 en a_0 es 0.0015, lo cual significa que tal diferencia es estadísticamente significativa, a favor de b_1 (76.67 vs. 55.97). La evaluación de los efectos simples de a en cada uno de los niveles de b no debe hacerse, pues como ya se dijo, el error estándar estimado para dichos efectos simples es inadecuado, por lo que la evaluación de éstos debe obtenerse con base en el procedimiento MIXED, que aunque genera los resultados en un formato menos familiar estima errores estándar adecuados para todas las comparaciones. La parte central del procedimiento se muestra a continuación.

```
PROC MIXED;
  CLASS Bloques A B;
  MODEL PESO=A B A*B/DDFM=SATTERTH;
  RANDOM Bloques(A);
  LSMEANS A B A*B/PDIFF;
RUN;
```

Nótese que en el estamento RANDOM del procedimiento MIXED se declaran todos los efectos aleatorios, mientras que en el estamento MODEL se incluyen solamente los efectos fijos. Se aclara que el factor bloques usualmente es aleatorio. Es importante resaltar que el procedimiento MIXED calcula los errores estándar correspondientes a diferencias de medias, es decir los que se usarían con las pruebas de t o de Scheffé. Si se quisieran realizar comparaciones manuales de medias con las pruebas de Duncan o de Tukey, con base en los errores estándar generados por el PROC MIXED, deberán usarse los siguientes errores:

$$S_{\bar{y}} \text{ (Duncan o Tukey)} = \sqrt{\frac{[S_{\bar{y}} \text{ (MIXED)}]^2}{2}}$$

A manera de resumen, se sugiere iniciar los análisis para este tipo de diseño con base en el PROC GLM. Si la interacción no es significativa, bastará con evaluar los efectos principales que sean del caso, con base en el mismo procedimiento, usando el estamento MEANS. En caso de que la interacción resulte significativa, será necesario complementar el análisis con el PROC MIXED, para la evaluación de los efectos simples.